Nauka Przyroda Technologie

2011
Tom 5
Zeszyt 5

ISSN 1897-7820 http://www.npt.up-poznan.net
Dział: Melioracje i Inżynieria Środowiska
Copyright ©Wydawnictwo Uniwersytetu Przyrodniczego w Poznaniu

BOGDAN J. WOSIEWICZ

Katedra Mechaniki Budowli i Budownictwa Rolniczego
Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu

O MOŻLIWOŚCI WYKORZYSTANIA MIESZANEGO SFORMUŁOWANIA METODY ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH DO SZACOWANIA DOKŁADNOŚCI ROZWIĄZANIA SFORMUŁOWANIA KLASYCZNEGO W DWUWYMIAROWYCH PROBLEMACH FILTRACJI USTALONEJ

Streszczenie. Oszacowania dokładności (*a posteriori*) uzyskanego rozwiązania numerycznego umożliwiają adaptacyjne poprawianie kolejnych rozwiązań, aż do uzyskania zadowalającej dokładności. Wykorzystywane są różne techniki takich oszacowań. W pracy przedstawiono nową propozycję wyznaczania błędu rozwiązań problemów filtracji ustalonej w klasycznym sformułowaniu metody elementów skończonych, gdzie niewiadomymi są tylko wysokości piezometryczne. Zaproponowana metoda opiera się na wykorzystaniu sformułowania mieszanego metody elementów skończonych, w którym niewiadomymi są również składowe wektora prędkości filtracji.

Słowa kluczowe: filtracja ustalona, metoda elementów skończonych, szacowanie błędów rozwiązania

Wstęp

Rozwiązanie wielu złożonych problemów filtracji możliwe jest wyłącznie metodami numerycznymi, z wykorzystaniem odpowiedniego oprogramowania. Do takich obliczeń najczęściej wykorzystywana jest metoda elementów skończonych. Przy rozwiązaniach numerycznych niezwykle istotne są informacje o dokładności uzyskanego rozwiązania (oszacowania *a posteriori*). Umożliwiają one adaptacyjne poprawianie kolejnych rozwiązań, aż do uzyskania zadowalającej dokładności ostatecznych rezultatów. W literaturze zaproponowano różne techniki szacowania błędów rozwiązania. Ich omówienie zawiera np. praca DEMKOWICZA (1986). RAKOWSKI (1996) wyróżnia dwie grupy sposobów takich oszacowań. Pierwsza ma charakter zdecydowanie matematyczny i wykorzystuje teorię interpolacji, oszacowania rezidualne czy teorię dualności. Druga grupa, rozwinięta w pracy ZIENKIEWICZA i ZHU (1987), wykorzystuje różne techniki postprocesingu do oszacowania błędu rozwiązania. Polega ona generalnie na ulepszeniu uzyskanego ze wstępnych obliczeń rozwiązania i przyjęciu takiego ulepszenia jako oszacowania rozwiązania ścisłego. Możliwe są tu różne techniki oszacowań. Najczęściej wykorzystywane są metody projekcji (od techniki uśredniania w węzłach począwszy, do technik bardziej wyrafinowanych), zjawisko superzbieżności czy koncepcja „łaty". Techniki adaptacyjnego poprawiania rozwiązania według RAKOWSKIEGO (1996) polegają generalnie na sensownym zwiększaniu liczby parametrów węzłowych (stopni swobody) w obszarze rozwiązania. Wersja określana literą h polega na zwiększaniu liczby elementów w obszarze dużych błędów (zmniejszania ich wymiarów) przy zachowaniu tych samych wielomianów interpolacyjnych. Wersja określona literą p polega na podwyższeniu stopnia wielomianu interpolacyjnego (a zatem zwiększenia liczby stopni swobody w elemencie) przy zachowaniu podziału na element. Stosowana jest także wersja h+p, polegająca na jednoczesnym zagęszczeniu siatki i podwyższaniu stopnia interpolacji. Przy realizacji wersji h istotne jest automatyczne generowanie siatki, a w metodach wersji p konieczne jest stosowanie hierarchicznych funkcji interpolacyjnych.

Także w zagadnieniach ruchu wód gruntowych wykorzystywane są techniki adaptacyjnego poprawiania rozwiązania, polegające najczęściej na postprocesingu, w którym dokonuje się stosownego oszacowania (ulepszenia) pola prędkości (zwykle przez odpowiedni proces uśredniania) i wyznaczania rozkładu błędu dla otrzymanego z pierwotnego rozwiązania pola prędkości. Pierwszą pracę na temat adaptacyjnego poprawiania rozwiązania w problemach filtracyjnych opublikowali BURKLEY i BRUCH (1991). W opracowanym przez nasz zespół inżynierskim oprogramowaniu do analizy zagadnień filtracyjnych (SROKA i IN. 2004) zostały też wprowadzone ulepszenia, polegające na możliwości szacowania lokalnego i globalnego błędu wyznaczenia prędkości (SROKA i IN. 2006). W cytowanej pracy testowano także różne strategie adaptacji typu h. Równomierny podział wszystkich elementów okazał się skrajnie nieefektywny.

Celem prezentowanej pracy jest nowa propozycja mierzenia błędu rozwiązania w klasycznym sformułowaniu metody elementów skończonych dla problemów filtracyjnych, gdzie niewiadomymi są tylko wysokości piezometryczne, oparta na wykorzystaniu sformułowania mieszanego metody elementów skończonych (MEISSNER 1973, WOSIEWICZ 1975), w którym niewiadomymi są zarówno wysokości piezometryczne, jak i składowe wektora prędkości.

Materiał i metody

Równania modelu mieszanego dla płaskich problemów filtracji

Równania modelu mieszanego metody elementów skończonych dla ustalonej w czasie płaskiej (dwuwymiarowej) filtracji przez ośrodki porowate (lub dla przepływów potencjalnych) wyprowadzili najpierw MEISSNER (1973), wykorzystując stosowne podejście wariacyjne oraz – niezależnie i niewiele później – WOSIEWICZ (1975), korzystając z układu równań definiujących problem, poprzez proces ortogonalizacji błędu. Wykorzystano tu podejście zastosowane w drugiej z cytowanych prac. Wyprowadzenie jest nieco ogólniejsze i wprowadzono też pewne zmiany.

Problem płaskiej (w planie lub pionie) liniowej filtracji w ośrodku ortotropowym można opisać układem równań różniczkowych:

$$\begin{aligned} q_x &= -k_x \frac{\partial h}{\partial x} \\ q_y &= -k_y \frac{\partial h}{\partial y} \\ \frac{\partial q_x}{\partial x} &+ \frac{\partial q_y}{\partial y} = Q \end{aligned} \tag{1}$$

Dwa pierwsze równania (konstytutywne) wyrażają tu zależność między jednostkowymi strumieniami objętości q_x i q_y – odpowiednio w kierunku osi x i y (nazywane też prędkościami filtracji) a wysokością piezometryczną:

$$h = \frac{p}{\rho g} + z \tag{2}$$

Ostatnie jest równaniem ciągłości, w którym Q(x,y) jest wydatkiem źródeł wewnętrznych na jednostkę powierzchni i czasu. W powyższych równaniach jako k_x i k_y oznaczano współczynniki filtracji odpowiednio w kierunku osi x i y, jako p(x,y) rozkład ciśnień, z jest wysokością położenia nad przyjęty poziom porównawczy, zaś ρ i g to odpowiednio gęstość cieczy oraz przyspieszenie ziemskie.

Równania (1) muszą być tożsamościowo spełnione przez funkcje $q_x = q_x(x,y)$, $q_y = q_y(x,y)$ oraz h(x,y) w obszarze filtracji Ω ograniczonym brzegiem Γ. Funkcje te powinny na poszczególnych częściach brzegu Γ_1, Γ_2 i Γ_3 spełniać warunki brzegowe:

$$\begin{aligned} &h(x,y) = g(x,y) && (x,y) \in \Gamma_1 \\ &q_n = q_x \cos\alpha + q_y \sin\alpha = q_1(x,y) && (x,y) \in \Gamma_2 \\ &q_n = q_2(x,y) + a(x,y)h(x,y) && (x,y) \in \Gamma_3 \end{aligned} \tag{3}$$

gdzie g(x,y), $q_1(x,y)$, $q_2(x,y)$ oraz a(x,y) są znanymi funkcjami na odpowiednich częściach brzegu Γ ($\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$), q_n jest przepływem przez brzeg, zaś α kątem między normalną zewnętrzną a osią x-ów.

W stosunku do wcześniejszej pracy autora (WOSIEWICZ 1975) uwzględniono tu formalnie możliwość zasilania przepływu źródłami wewnętrznymi ($Q(x,y) \neq 0$) oraz formułowania warunku brzegowego trzeciego rodzaju. Jednak w typowych zadaniach filtracyjnych pojawiają się najczęściej tylko dwa pierwsze warunki brzegowe (Dirchleta oraz Neumanna) – zadana wysokość piezometryczna (określona funkcją g(x,y)) lub zadany przepływ przez brzeg, przy czym z reguły jest to wydatek $q_n = 0$, a zatem brzeg nieprzepuszczalny. Takie warunki brzegowe przyjęto dla dalszej (aplikacyjnej) części badań.

Obszar filtracji Ω dzielimy w typowy dla klasycznej wersji MES sposób, na skończoną liczbę L podobszarów Ω^e o brzegach Γ^e (e = 1, 2, ..., L). W każdym elemencie wyróżnia się pewną liczbę punktów (węzłów). W sumie wyróżnionych będzie N węzłów. Każdą z poszukiwanych funkcji q_x, q_y i h w całym obszarze Ω aproksymować można następującymi wyrażeniami:

$$\begin{aligned}
\tilde{q}_x &= \sum_{\chi=1}^{n} \varphi_\chi U_\chi = \varphi_1 U_1 + \varphi_2 U_2 + \ldots + \varphi_n U_n = \mathbf{\Phi U} \\
\tilde{q}_y &= \sum_{\lambda=1}^{n} \psi_\lambda V_\lambda = \psi_1 V_1 + \psi_2 V_2 + \ldots + \Psi_n V_n = \mathbf{\Psi U} \\
\tilde{h} &= \sum_{\mu=1}^{m} \omega_\mu H_\mu = \omega_1 H_1 + \omega_2 H_2 + \ldots + \omega_m H_m = \mathbf{\Omega H}
\end{aligned} \tag{4}$$

W wyrażeniach (4) wielkości U_χ, V_λ i H_μ – oznaczają odpowiednio po n parametrów (związanych z jednostkowym strumieniem objętości w kierunku osi x i y (wartości w węzłach) oraz m parametrów związanych z wysokościami piezometrycznymi (wartości węzłowe). Łącznie będzie 2n + m = N nieznanych wartości węzłowych. Indeksy χ, λ, μ są globalnymi numerami parametrów U, V i H. Funkcje kształtu (interpolacyjne) $\varphi_\chi = \varphi_\chi(x,y)$, $\psi_\lambda = \psi_\lambda\,(x,y)$ oraz $\omega_\mu = \omega_\mu\,(x,y)$ określają, w jaki sposób q_x, q_y oraz h zależą od współrzędnych x, y i parametrów węzłowych U_χ, V_λ, H_μ.

W metodzie elementów skończonych funkcje kształtu (interpolacyjne) wybiera się w ten sposób, że są one różne od zera jedynie w obszarze (podobszarze), którego miara jest mała w stosunku do miary obszaru Ω. Funkcje φ_χ, ψ_λ, ω_μ są generalnie różne od zera jedynie w elementach, które zawiera węzeł odpowiednio o numerze χ, λ, μ. Zasady tworzenia i doboru funkcji interpolacyjnych opisano w wielu pracach i opracowaniach monograficznych (np. KOLÁŘ I IN. 1971, ODEN 1972, ZIENKIEWICZ 1972, ZIENKIEWICZ I TAYLOR 2000 itd.).

Podstawiając wyrażenia (4) do równań (1), uzyskamy:

$$\begin{aligned}
K_x \mathbf{\Phi U} + \mathbf{\Omega}_x \mathbf{H} &= e_1(x,y,\mathbf{\Phi},\mathbf{\Omega}) \\
K_y \mathbf{\Psi V} + \mathbf{\Omega}_y \mathbf{H} &= e_2(x,y,\mathbf{\Psi},\mathbf{\Omega}) \\
\mathbf{\Phi}_x \mathbf{U} + \mathbf{\Psi}_y \mathbf{V} - \mathbf{Q} &= e_3(x,y,\mathbf{\Phi},\mathbf{\Psi})
\end{aligned} \tag{5}$$

gdzie $K_x = 1/k_x$ oraz $K_y = 1/k_y$, zaś elementami macierzy $\mathbf{\Phi}_x$ i $\mathbf{\Omega}_x$ są pochodne funkcji φ_χ i ω_μ względem zmiennej x, czyli $\partial\varphi_\chi/\partial x$ oraz $\partial\omega_\mu/\partial x$, natomiast elementami macierzy $\mathbf{\Psi}_y$ i $\mathbf{\Omega}_y$ są odpowiednio pochodne funkcji ψ_λ i ω_μ względem zmiennej y. Lewe strony równań (5) nie są oczywiście równe zeru, gdyż $\tilde{q}_x, \tilde{q}_y, \tilde{h}$ są tylko przybliżonymi rozkładami funkcji q_x, q_y i h. Dokładność tego przybliżenia zależy generalnie od liczby parametrów węzłowych oraz rozmieszczenia węzłów w obszarze (od podziału na elementy). Funkcje e_1, e_2, i e_3 opisują błąd spełnienia równań (1) przez przybliżone wyrażenia (4).

Dokonamy teraz minimalizacji wartości tych błędów w analizowanym obszarze filtracji Ω metodą Galerkina, przez ortogonalizację funkcji e_1, e_2, e_3 z układem funkcji φ_γ, ψ_λ, ω_μ w sposób zaproponowany w pracy WOSIEWICZA (1975). Warunki minimalizacji można zapisać następująco:

$$\begin{aligned} &\iint_\Omega \varphi_\chi e_1 dxdy = 0 \\ &\iint_\Omega \psi_\lambda e_2 dxdy = 0 \\ &\iint_\Omega \omega_\mu e_3 dxdy = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

gdzie $\chi = 1, 2, ... n$; $\lambda = 1, 2, ... n$; $\mu = 1, 2, ... m$.

Realizując operacje wynikające z powyższych równań, uzyskamy:

$$\begin{aligned} &\iint_\Omega K_x \varphi_\chi \mathbf{\Phi U} dxdy + \iint_\Omega \varphi_\chi \mathbf{\Omega}_x \mathbf{H} dxdy = 0 \\ &\iint_\Omega K_y \Psi_\lambda \mathbf{\Psi V} dxdy + \iint_\Omega \Psi_\lambda \mathbf{\Omega}_y \mathbf{H} dxdy = 0 \\ &\iint_\Omega \omega_\mu \mathbf{\Phi}_x \mathbf{U} dxdy + \iint_\Omega \omega_\mu \mathbf{\Psi}_y \mathbf{V} dxdy = \iint_\Omega \omega_\mu Q dxdy \end{aligned} \tag{7}$$

Otrzymane zależności można doprowadzić do postaci symetrycznej, stosując do ostatniego wiersza twierdzenie Greena w następującej postaci:

$$\iint_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x}(\omega_\mu q_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\omega_\mu q_y) \right] dxdy = \int_\Gamma \omega_\mu (q_x \cos\alpha + q_y \sin\alpha) ds \tag{8}$$

gdzie α jest nadal kątem między normalną zewnętrzną do brzegu Γ a osią x.

Wykonując różniczkowanie w pierwszej całce zależności (8), rozdzielając ją na sumę dwóch całek zawierających odpowiednio pochodne funkcji ω_μ oraz pochodne q_x i q_y, a następnie zastępując q_x i q_y ich przybliżeniami $\tilde{q}_x$ i $\tilde{q}_y$ wynikającymi z aproksymacji zależnościami (4) uzyskamy:

$$\iint_\Omega \omega^\mu \left(\mathbf{\Phi}_x \mathbf{U} + \mathbf{\Psi}_y \mathbf{V} \right) dxdy = \int_\Gamma \omega_\mu \left(\mathbf{\Phi U} \cos\alpha + \mathbf{\Psi V} \sin\alpha \right) ds - \iint_\Omega \left(\frac{\partial \omega_\mu}{\partial x} \mathbf{\Phi U} + \frac{\partial \omega_\mu}{\partial y} \mathbf{\Psi V} \right) dxdy \tag{9}$$

Wykorzystując powyższą równość, ostatni wiersz zależności (10) można zapisać następująco:

$$\iint_\Omega \frac{\partial \omega_\mu}{\partial x} \mathbf{\Phi U} dxdy + \iint_\Omega \frac{\partial \omega_\mu}{\partial y} \mathbf{\Psi V} dxdy + \iint_\Omega \omega_\mu Q dxdy = \int_\Gamma \omega_\mu \left(\mathbf{\Phi U} \cos\alpha + \mathbf{\Psi V} \sin\alpha \right) ds \tag{10}$$

Rozpatrzmy bliżej całkę po brzegu w powyższej zależności. Zauważmy, że całka ta jest równa zeru na części Γ_1 brzegu, bowiem wszystkie funkcje ω_μ znikają na tej części brzegu. Należałoby sprecyzować, że zależności (10) tworzone są wyłącznie dla węzłów, dla których wysokości piezometryczne nie są znane, czyli są tworzone tylko dla węzłów nieleżących na brzegu Γ_1. Wówczas, w pozostałych całkach typu (10), funkcje ω_μ są równe zeru wzdłuż brzegu Γ_1.

Wyrazu stojącego w nawiasie w całce po brzegu nie można wprost wyznaczyć na podstawie warunków brzegowych (3) (drugiego i trzeciego), gdyż funkcje $\tilde{q}_x$ i $\tilde{q}_y$ są tylko przybliżonymi wartościami q_x i q_y, a nie wartościami ścisłymi. Można je jednak określić poprzez ortogonalizację błędu spełnienia przez te funkcje warunków brzegowych z układem funkcji ω_μ, jak to pokazano wcześniej (WOSIEWICZ 1975). Podstawiając funkcje $\tilde{q}_x$ i $\tilde{q}_y$ do trzeciego z warunków brzegowych (3), uzyskamy:

$$\mathbf{\Phi U}\cos\alpha + \mathbf{\Psi V}\sin\alpha - q(x,y) - a(x,y)h(x,y) = e_4(x,y,\mathbf{\Phi},\mathbf{\Psi}) \tag{11}$$

gdzie $q = q_1 \wedge a \equiv 0$ dla $(x,y) \in \Gamma_2$ oraz $q = q_2$ dla $(x,y) \in \Gamma_3$.

Warunki minimalizacji błędu e_4 z układem funkcji ω_μ mają postać

$$\int_{\Gamma_{2\text{-}3}} \omega_\mu e_4 ds = 0 \tag{12}$$

gdzie oznaczono $\Gamma_{2\text{-}3} = \Gamma_2 \cup \Gamma_3$. Podstawiając zależność (11) do (12), uzyskamy:

$$\int_{\Gamma_{2\text{-}3}} \omega_\mu (\mathbf{\Phi U}\cos\alpha + \mathbf{\Psi V}\sin\alpha) ds = \int_{\Gamma_{2-3}} \omega_\mu (q + ah) ds$$

Ostatecznie zatem ostatni wiersz zależności (7) można zapisać w postaci:

$$\iint_\Omega \frac{\partial \omega_\mu}{\partial y} \mathbf{\Phi U} dxdy + \iint_\Omega \frac{\partial \omega_\mu}{\partial y} \mathbf{\Psi V} dxdy = \int_{\Gamma_{2-3}} \omega_\mu (q + ah) ds - \iint_\Omega \omega_\mu Q dxdy \tag{13}$$

Należy zwrócić uwagę, że dla przepływów bezźródłowych (Q = 0) znika ostatnia całka (po obszarze Ω) w zależności (13). Jeżeli rozpatrywać tylko sytuacje, w których nie występują warunki brzegowe III-ego rodzaju ($a \equiv 0$), a zadane przez brzeg przepływy są równe zeru $q \equiv q_1 \equiv q_2 \equiv 0$ (brzeg nieprzepuszczalny), to równa zeru jest także całka po brzegu $\Gamma_{2\text{-}3}$.

Zapiszmy teraz ostateczny układ równań w następującej zwartej postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{G}_{13} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_{22} & \mathbf{G}_{23} \\ \mathbf{G}_{31} & \mathbf{G}_{32} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{V} \\ \mathbf{H} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_u \\ \mathbf{P}_\mathrm{v} \\ \mathbf{P}_\mathrm{h} \end{Bmatrix} \tag{14}$$

Po lewej stronie występują jedynie niewiadome składowe jednostkowego wektora strumienia objętości q_x i q_y, czyli **U** i **V**, oraz niewiadome wartości wysokości piezometrycznych h, czyli **H**. Z układu równań wyeliminowane są natomiast wszystkie równania dla węzłów, w których wysokości piezometryczne są znane. Odpowiednie wyrazy poszczególnych równań ze znanymi wysokościami piezometrycznymi należy przenieść na prawą stronę. Do układu wprowadzone są także związki między składowymi q_x i q_y na brzegu Γ_2 i Γ_3. Otrzymamy w ten sposób wyrazy $\mathbf{P}_u$ oraz $\mathbf{P}_v$. Wyraz $\mathbf{P}_h$ jest natomiast różny od zera, tylko jeśli rozważamy filtrację ze źródłami lub/i z zadanymi przepływami przez brzeg różnymi od zera (także warunek brzegowy II-ego rodzaju).

Poszczególne podmacierze układu równań (14) określone są zależnościami:

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}_{11} &= \iint_{\Omega} K_x \mathbf{\Phi}^T \mathbf{\Phi}\,dxdy \\
\mathbf{G}_{13} &= \iint_{\Omega} \mathbf{\Phi}^T \mathbf{\Omega}_x\,dxdy \\
\mathbf{G}_{22} &= \iint_{\Omega} K_y \mathbf{\Psi}^T \mathbf{\Psi}\,dxdy \\
\mathbf{G}_{23} &= \iint_{\Omega} \mathbf{\Psi}^T \mathbf{\Omega}_y\,dxdy \\
\mathbf{G}_{31} &= \iint_{\Omega} \mathbf{\Omega}_x^T \mathbf{\Phi}\,dxdy \\
\mathbf{G}_{32} &= \iint_{A} \mathbf{\Omega}_y^T \mathbf{\Psi}\,dxdy \\
\mathbf{G}_{12} &= \mathbf{0} \qquad \mathbf{G}_{21} = \mathbf{0} \qquad \mathbf{G}_{33} = \mathbf{0} \\
\mathbf{P}_h &= \int_{\Gamma_{2-3}} \mathbf{\Omega}(q + ah)\,d\Gamma - \int_{\Omega} \mathbf{\Omega} Q\,dxdy
\end{aligned} \tag{15}$$

W praktyce układ równań (14) budowany jest w sposób typowy dla metody elementów skończonych, przez sumowanie udziału poszczególnych elementów. Udział e-tego elementu w układzie równań (14) można zapisać następująco:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{11} & \mathbf{g}_{12} & \mathbf{g}_{13} \\ \mathbf{g}_{21} & \mathbf{g}_{22} & \mathbf{g}_{23} \\ \mathbf{g}_{31} & \mathbf{g}_{32} & \mathbf{g}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{V} \\ \mathbf{H} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{p}_h \end{Bmatrix} \tag{16}$$

Definicja wyrazów $\mathbf{g}_{ij}$ (i,j = 1,2,3) oraz $\mathbf{p}_h$ wynika wprost z zależności (14) i definicji (15). Pamiętać tylko należy, że wymiary macierzy w tych formułach ($\mathbf{\Phi}$,$\mathbf{\Psi}$ oraz $\mathbf{\Omega}_x$ i $\mathbf{\Omega}_y$) zależą od liczby parametrów węzłowych w elemencie związanym z q_x i q_y oraz h (odpowiednio n_e i m_e), a całkowanie należy wykonać w obrębie analizowanego elementu.

Przykładowo:

$$\mathbf{g}_{11} = \iint_{\Omega^e} K_x \boldsymbol{\varphi}^T \boldsymbol{\varphi} dxdy$$

gdzie: $\boldsymbol{\varphi} = [\varphi_1, \varphi_2, ...\varphi_{ne}]$ to zbiór lokalnych funkcji kształtu (aproksymujących).

W podobny sposób można zinterpretować pozostałe podmacierze $\mathbf{g}_{ij}$. Mamy też:

$$\mathbf{p}_h = \int_{\Omega^e} \boldsymbol{\omega} Q dxdy - \int_{\Gamma^e_{2-3}} \boldsymbol{\omega}(q + ah) ds$$

gdzie: $\boldsymbol{\omega} = [\omega_1, \omega_2, ...,\omega_{me}]$.

Warto pamiętać, że część macierzy $\mathbf{g}_{ij}$ to macierze zerowe stosowanych wymiarów:

$$\mathbf{g}_{12} = \mathbf{0},\ \mathbf{g}_{21} = \mathbf{0},\ \mathbf{g}_{33} = \mathbf{0}$$

Także wszystkie elementy wektorów $\mathbf{p}_u$ i $\mathbf{p}_v$ są równe zeru.

Gotowe formuły dla elementu trójkątnego o dziewięciu parametrach węzłowych, tzn. wartości funkcji q_x, q_y, h w wierzchołkach trójkąta U_χ, V_λ, H_μ ($\chi,\lambda,\mu = 1, 2, 3$), wyprowadzono w pracy WOSIEWICZA (1975), przyjmując lokalny układ współrzędnych w środku ciężkości elementu i liniowe funkcje aproksymujące (wielomiany) dla każdej z aproksymowanych wielkości.

Ocena dokładności rozwiązania klasycznego

Celem prezentowanej pracy jest wykorzystanie wyprowadzonego układu równań modelu mieszanego metody elementów skończonych do oceny dokładności rozwiązania opartego na sformułowaniu klasycznym, gdzie niewiadomymi są wyłącznie wysokości piezometryczne.

Rozważmy ponownie układ równań (14). Macierz analizowanego układu jest macierzą symetryczną. Wystarczy pamiętać tylko dolną lub górną macierz trójkątną. Przy sensownej numeracji węzłów jest ona także macierzą pasmową, co zmniejsza konieczne zaangażowanie pamięci. Jednak na przekątnej głównej pojawiają się zera ($\mathbf{G}_{33} = 0$), co istotnie utrudnia jej rozwiązanie. Wykonując stosowne działania macierzowe, uzyskuje się z układu (14) trzy grupy równań:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{11}\mathbf{U} + \mathbf{G}_{13}\mathbf{H} &= \mathbf{P}_u \\ \mathbf{G}_{22}\mathbf{V} + \mathbf{G}_{23}\mathbf{H} &= \mathbf{P}_v \\ \mathbf{G}_{31}\mathbf{U} + \mathbf{G}_{32}\mathbf{V} &= \mathbf{P}_h \end{aligned} \tag{17}$$

Rozwiązanie tego układu może być następujące. Poszukiwane są wektory **U**, **V** i **H**. Z pierwszej i drugiej grupy równań można wyznaczyć odpowiednio **U** i **V** przez poszukiwane wysokości piezometryczne **H**:

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \mathbf{G}_{11}^{-1}(\mathbf{P}_u - \mathbf{G}_{13}\mathbf{H}) \\ \mathbf{V} &= \mathbf{G}_{22}^{-1}(\mathbf{P}_v - \mathbf{G}_{23}\mathbf{H}) \end{aligned} \tag{18}$$

Oczywiście stosowne macierze $\mathbf{G}_{11}$ oraz $\mathbf{G}_{22}$ muszą być nieosobliwe. Wstawiając powyższe zależności do ostatniej grupy równań (17), uzyskamy:

$$\mathbf{G}_{31}\mathbf{G}_{11}^{-1}(\mathbf{P}_\mathrm{u} - \mathbf{G}_{13}\mathbf{H}) + \mathbf{G}_{32}\mathbf{G}_{22}^{-1}(\mathbf{P}_\mathrm{v} - \mathbf{G}_{23}\mathbf{H}) = \mathbf{P}_\mathrm{h} \tag{19}$$

a po uporządkowaniu układ równań:

$$(\mathbf{G}_{31}\mathbf{G}_{11}^{-1}\mathbf{G}_{13} + \mathbf{G}_{32}\mathbf{G}_{22}^{-1}\mathbf{G}_{23})\mathbf{H} = \mathbf{G}_{31}\mathbf{G}_{11}^{-1}\mathbf{P}_\mathrm{u} + \mathbf{G}_{32}\mathbf{G}_{22}^{-1}\mathbf{P}_\mathrm{v} - \mathbf{P}_\mathrm{h} \tag{20}$$

którego rozwiązaniem jest wektor:

$$\mathbf{H} = (\mathbf{G}_{31}\mathbf{G}_{11}^{-1}\mathbf{G}_{13} + \mathbf{G}_{32}\mathbf{G}_{22}^{-1}\mathbf{G}_{23})^{-1}(\mathbf{G}_{31}\mathbf{G}_{11}^{-1}\mathbf{P}_\mathrm{u} + \mathbf{G}_{32}\mathbf{G}_{22}^{-1}\mathbf{P}_\mathrm{v} - \mathbf{P}_\mathrm{h}) \tag{21}$$

Oczywiście rozwiązanie układu równań (20) jest możliwe, gdy stojąca w nawiasie przed **H** macierz kwadratowa jest nieosobliwa. Po wyznaczeniu **H** na podstawie zależności (18) można wyznaczyć odpowiednio **U** i **V**.

Otrzymany układ równań (20) można jednak wykorzystać inaczej – do oceny (oszacowania) dokładności rozwiązania opartego na klasycznym sformułowaniu metody elementów skończonych, gdzie niewiadomymi są tylko wysokości piezometryczne. W modelu klasycznym, stosując elementy niezapewniające ciągłości pochodnych (a jest to prawie reguła) właśnie z uwagi na nieciągłość składowych wektora gradientu pomiędzy elementami składowymi jednostkowego strumienia objętości (prędkość filtracji) w węzłach, podziały na elementy będą zależały od tego, z którego elementu je wyznaczamy. Zwykle dla większej dokładności wyznaczania prędkości w węzłach stosuje się wówczas zabieg uśredniania (por. np. w pracy WOSIEWICZA 1981). Jest to niezbędne także wówczas, gdy żądamy ciągłego układu prędkości (gradientów), choćby do graficznego ich zilustrowania (SROKA i IN. 2004).

Załóżmy teraz, że dla przyjętego podziału na elementy znamy wartości wysokości piezometrycznych wyznaczone z klasycznego podejścia metody elementów skończonych. Oznaczmy te wartości przez $\mathbf{H}_\mathrm{k}$. Wartości te są oczywiście inne niż wartości węzłowe **H** otrzymywane z analizowanego tu modelu mieszanego, a zatem wektor $\mathbf{H}_\mathrm{k}$, nie spełnia układu równań (20). Podstawiając do równań (20) wektor $\mathbf{H}_\mathrm{k}$, uzyskamy więc:

$$\mathbf{R} = (\mathbf{G}_{31}\mathbf{G}_{11}^{-1}\mathbf{G}_{13} + \mathbf{G}_{32}\mathbf{G}_{22}^{-1}\mathbf{G}_{23})\mathbf{H}_\mathrm{k} - \mathbf{G}_{31}\mathbf{G}_{11}^{-1}\mathbf{P}_\mathrm{u} - \mathbf{G}_{32}\mathbf{G}_{22}^{-1}\mathbf{P}_\mathrm{v} + \mathbf{P}_\mathrm{h} \tag{22}$$

Uzyskany wektor **R** (residuum) jest miarą spełnienia równań (20) przez wektor $\mathbf{H}_\mathrm{k}$. Wyraz R_i wskazuje na dokładność spełnienia i-tego równania. Pamiętać trzeba, że każde z równań (20) jest równaniem bilansu (ciągłości) przepływów, w którym składowe wektora jednostkowego strumienia objętości (prędkość filtracji) wyznaczono ze związków (18) na podstawie przybliżonych wartości wektorów $\mathbf{H}_\mathrm{k}$. Wyraz R_i określa zatem dokładność spełnienia i-tego bilansu.

Dokładność spełnienia układu równań (20) może zatem służyć do wyznaczania węzłów, w których bilans przepływu jest szczególnie słabo spełniony. Oznaczać to będzie, że wyznaczone na podstawie $\mathbf{H}_\mathrm{k}$ i wzorów (18) składowe wektora jednostkowego strumienia objętości są obarczone sporym błędem. Eliminacja tego błędu może polegać na przebudowie siatki podziału na elementy i jej zagęszczeniu w obszarach szczególnie dużych błędów (adaptacja typu h). W obszarach małych wartości R_i możliwe jest natomiast rozrzedzenie siatki. Problemem jest oczywiście określenie takich wartości R_i, przy których siatkę należy zagęścić. Można przyjąć na przykład, że w obszarach wokół węzłów, dla których:

$$R_i \geq r_1 \quad i = 1,2,...,n \tag{23}$$

należy siatkę zagęścić, a wokół węzłów, gdzie:

$$R_i \leq r_2 \quad i = 1,2,...,n \tag{24}$$

można ją nawet rozrzedzać. W zależnościach (23) i (24) przez r_1 oznaczono dopuszczalną wartość residuum (błędu spełnienia równań bilansu przepływu), a przez r_2 taką wartość residuum dopuszczającą rozrzedzenie siatki.

Podsumowanie

W prezentowanej pracy zaproponowano nową technikę oszacowania błędu (a posteriori) klasycznego sformułowania metody elementów skończonych w płaskich problemach filtracyjnych, gdzie niewiadomymi są tylko wysokości piezometryczne, opartą na wykorzystaniu sformułowania mieszanego metody elementów skończonych, w którym niewiadomymi są zarówno wysokości piezometryczne, jak i składowe jednostkowego strumienia objętości (wektora prędkości filtracji).

W dalszych badaniach konieczne jest wykazanie (przynajmniej przez bezpośrednie obliczenia), że po wprowadzeniu warunków brzegowych do układu równań modelu mieszanego można go istotnie rozwiązać w zaproponowany sposób (co wymaga nieosobliwości stosowanych macierzy). Konieczne są także badania dotyczące efektywności zaproponowanej metody szacowania błędów. Wykonanie obliczeń opisanych zależnością (22) jest bowiem możliwe za pomocą ogólnych programów matematycznych do wykonywania operacji macierzowych. Jest to jednak sensowne wyłącznie dla zadań małych. Implementacja zaproponowanego sposobu szacowania błędu spełnienia równań bilansowych wymaga zatem obmyślenia efektywnego algorytmu realizacji obliczeń. Będzie to przedmiotem dalszych prac. Konieczne jest także wypracowanie kryteriów wymuszających zagęszczenie siatki lub umożliwiających jej rozrzedzenie, czyli wyznaczenia liczb r_1 i r_2. Mogą one zależeć od rozwiązywanego problemu.

Literatura

BURKLEY V.J., BRUCH J.C. (JR.), 1991. Adaptive error analysis in seepage problems. Int. J. Num. Meth. Eng. 31: 1333-1356.

DEMKOWICZ L., 1986. Adaptacyjne metody elementów skończonych. Monogr. P. Krak. 46.

KOLÁŘ V., KRATOCHWIL J., ZLÁMAL M., ŽENIŠEK A., 1971. Technical, physical and mathematical principles of the finite element methods. Rozpravy ČSAV 81, 2.

MEISSNER U., 1973. A mixed finite element model for use in potential flow problems. Int. J. Num. Meth. Eng. 6: 467-473.

ODEN J.T., 1972. Finite element of nonlinear continua. McGraw Hill, New York.

RAKOWSKI G., 1996. Metoda elementów skończonych. Wybrane problemy. Ofic. Wyd. Politechniki Warszawskiej, Warszawa.

SROKA Z., WALCZAK Z., WOSIEWICZ B.J., 2004. Analiza ustalonych przepływów wód gruntowych metodą elementów skończonych. Oprogramowanie inżynierskie. Wyd. AR, Poznań.

SROKA Z., WALCZAK Z., WOSIEWICZ B.J., 2006. Automatyzacja procesu tworzenia elementowego modelu przepływu wody w gruncie z kontrolowaną wartością błędu numerycznego. Apar. Bad. Dydakt. 11, 1: 19-25.

WOSIEWICZ B., 1975. Model mieszany metody elementów skończonych dla problemów filtracji ustalonej. Arch. Hydrotech. 22, 2: 154-166.

WOSIEWICZ B., 1981. O pewnej interpretacji metod energetycznych dla problemów filtracji ustalonej. Mech. Teor. Stosow. 19, 1: 105-113.

ZIENKIEWICZ O.C., 1972. Metoda elementów skończonych. Arkady, Warszawa.

ZIENKIEWICZ O.C., TAYLOR R.L., 2000. The finite element method. Vol. 1. The basic. Butterworth-Heinemann, Oxford.

ZIENKIEWICZ O.C., ZHU J.Z., 1987. A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. Int. J. Num. Meth. Eng. 24: 332-357.

ABOUT A POSSIBILITY OF THE USE OF MIXED FINITE ELEMENT MODEL FOR ERROR ESTIMATION OF CLASSICAL FORMULATION OF THE METHOD IN TWO-DIMENSIONAL STEADY SEEPAGE PROBLEMS

Summary. Error estimation (*a posteriori*) for obtained numerical results make it possible to improve next solutions up to get the ones that are correct enough. Various techniques of error estimation are used. A new error estimation technique in classical finite element solutions for steady seepage problems, where only piezometric heads are unknown, is presented in the paper. The proposed method is based on a mixed finite element model with unknown components of seepage velocities as well.

Key words: steady seepage, finite element method, error estimation

Adres do korespondencji – Corresponding address:
Bogdan J. Wosiewicz, Katedra Mechaniki Budowli i Budownictwa Rolniczego, Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu, ul. Piątkowska 94 E, 60-649 Poznań, Poland, e-mail: bjw@up.poznan.pl

Zaakceptowano do druku – Accepted for print:
13.06.2011

Do cytowania – For citation:
Wosiewicz B.J., 2011. O możliwości wykorzystania mieszanego sformułowania metody elementów skończonych do szacowania dokładności rozwiązania sformułowania klasycznego w dwuwymiarowych problemach filtracji ustalonej. Nauka Przyr. Technol. 5, 5, #99.